시간지연이 있는 피드백 제어를 통한 루어 시스템의 동기화 문제

이용권, 김성동, 이승훈, 권오민
충북대학교

leeywkgg@cbnu.ac.kr, eaststar83@gmail.com, acafela@cbnu.ac.kr, madwind@cbnu.ac.kr

Synchronization of Lur'e system via time-delay feedback control

Lee Yong Gwon, Kim Sung Dong, Lee Seung Hoon, Kwon Oh Min
Chungbuk National Univ.

요 약

본 논문은 시간지연이 있는 비선형 피드백 시스템의 동기화 문제에 대해 다루고 있다. 동기화 조건을 얻기 위해, 리아프노브 방법과 사실 1 과 보조정리들을 통하여 루어 시스템을 선형 행렬 부등식의 형태로 조건을 유도하였다. 간단한 수치 예제를 통해 제안된 방법의 유효 가능성을 확인하였다.

Ⅰ. 서 론

이전의 많은 연구에서 선형피드백 시스템과 연속 시스템에 대한 연구는 활발히 이루어져왔다. 하지만 디지털 장비와 통신기술의 가파른 발전을 통해 목적을 위하여 복잡한 센서, 엑츄에이터의 사용이 만연해지고 있다. 이러한 목적에 의해 비선형성을 갖는 장비와 센서를 통해 얻어지는 신호들은 제어방법에 있어 큰 문제점에 직면하였고, 복잡한 제어기법을 필요로 하게 되었다.

특히, 비선형 피드백 시스템인 루어 시스템에서 다이나믹스들의 비동기현상을 해결하기 위해 특별한 리아프노브 함수와 선형 행렬 부등식의 형태가 연구에 이용되고 있다. 논문 [3] 에서는 일반적인 루어 시스템에서 리아프노브 함수를 이용하여 카오스 동기화 제어 기법을 소개하였다.

한편으로는, 논문 [3]에서 제시한 동종 카오스 시스템의 동기화에 대한 첫 연구 이후로, 오늘날 카오스 시스템의 동기화에 대한 연구는 여러 분야의 학자들로 부터 큰 관심을 받고 있다.

그러므로, 본 논문에서는 카오스 시스템의 하나인 시간지연이 있는 비선형 피드백 시스템인 루어 시스템의 동기화 문제에 대해 리아프노브 방법을 활용하여 동기화 조건을 선형행렬 부등식의 형태로 연구할 것이다. 또한 간단한 수치예제에 적용하여 제안한 방법의 효율성에 서술할 것이다.

Ⅱ. 문제 설정

아래의 루어 시스템(Lur'e system)을 고려하자.

$$M: \dot{m}(t) = Am(t) + Bf(m(t)), \tag{1}$$

$$S: \dot{s}(t) = As(t) + Bf(s(t)) + u(t). \tag{2}$$

여기에서 $m(t)$ 와 $s(t)$ 는 각각의 시스템 (1), (2)의 상태 벡터, $f(\cdot)$ 는 $\left[\gamma^-, \gamma^+\right]$의 범위를 만족하는 비선형 함수이고 $u(t)$ 는 제어입력, A 와 B 는 알고있는 시스템 행렬들이다.

이때, 오차신호를 $e(t) = m(t) - s(t)$ 으로 정의하면, 아래와 같은 시스템을 나타낼 수 있다.

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + Bg(e(t)) - u(t), \tag{3}$$

여기에서, $g(e(t)) = f\left(m(t)\right) - f\left(s(t)\right)$ 이며 아래와 같은 성질을 만족한다.

$$\gamma_i^- \le \frac{g_i(e(t))}{e_i(t)} = \frac{f_i(m(t)) - f_i(s(t))}{m_i(t) - s_i(t)} \le \gamma_i^+, \tag{4}$$

또한, 시스템 (3)의 입력에 시간지연이 포함된 제어기 개념을 적용하면 다음과 같이 표현된다.

$$u(t) = LC(m(t-h(t)) - s(t-h(t)) = LCe(t-h(t)). \tag{5}$$

시스템 (3)에 제어기 (5)를 적용하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + Bg(e(t)) - LCe(t-h(t)). \tag{6}$$

주요 결과를 유도하기 전에 다음의 사실과 보조정리를 제시한다.

보조정리 1. Wirtinger-based integral inequality [1].
보조정리 2. Reciprocally convex approach [2].

Ⅲ. 주요 결과

본 장에서는 루어 시스템의 동기화 문제를 위한 시간지연이 있는 피드백 제어기 설계를 위해 유도할 것이다. 주요 결과를 소개하기 전에 유도되는 행렬을 간단하게 하기 위해 다음과 같은 정의를 한다.

$$\zeta_1(t) = col\left\{e(t), e\left(t-h(t)\right), e(t-h), \dot{e}(t)\right\},$$

$$\zeta_2(t) = col\left\{\frac{1}{h(t)}\int_{t-h(t)}^{t} e(s)ds, \frac{1}{h-h(t)}\int_{t-h}^{t-h(t)} e(s)ds, g\left(e(t)\right)\right\},$$

$$\zeta(t) = col\left\{\zeta_1(t), \zeta_2(t)\right\},\ e_i = [0_{n\times(i-1)n}, I_n]^T, (i = 1, 2, \ldots, 7),$$

$$\Xi_1 = Sym\left\{e_1 P e_4^T\right\} + e_1\left(Q_1 + Q_2\right)e_1^T - e_3 Q_1 e_3^T - \left(1 - h_d\right)e_2 Q_2 e_2^T,$$

$$\Xi_2 = h^2 e_4 R e_4^T - [\eta_1, \eta_2]\bar{R}[\eta_1, \eta_2]^T,$$

$$\Xi_3 = Sym\left\{\left(e_7 - e_1\Gamma^-\right)L_1 e_4^T + \left(e_1\Gamma^+ - e_7\right)L_2 e_4^T\right\},$$

$$\Xi_4 = -Sym\left\{\left(e_7 - e_1\Gamma^-\right)K\left(e_1\Gamma^+ - e_7\right)^T\right\},$$

$$\Xi_5 = Sym\left\{\left(e_1 + e_4\alpha\right)\left(XAe_1^T + XBe_7^T - YCe_2^T - Xe_4^T\right)\right\},$$

정리 1. 양의 스칼라 α , h 가 주어지고 다음의 LMI (7), (8)을 만족하는 양한정 행렬행렬 P, Q_1, Q_2, R, K, 그리고 임의 행렬 S, X, Y 이 존재하면 시스템 (6)는 점근적으로 안정하다.

$$\Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_3 + \Xi_4 + \Xi_5 < 0, \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} diag\{R,3R\} & S \\ S^T & diag\{R,3R\} \end{bmatrix} > 0. \tag{8}$$

이때, 제어 이득은 $L = YX^{-1}$ 로 얻을 수 있다.

증명. 리아프노브-크라소브스키 함수(LKF)를 다음과 같이 정한다.

$$V = x^T(t)Px(t) + \int_{t-h}^{t} x^T(s)Q_1x(s)ds + \int_{t-h(t)}^{t} x^T(s)Q_2x(s)ds$$
$$+h\int_{t-h}^{t}\int_{s}^{t} \dot{x}^T(u)R\dot{x}(u)duds.$$

보조 정리 1 과 2 을 이용하여, $V(t)$ 의 시간에 대한 미분을 구하게 되면 아래와 같다.

$$\dot{V} \le \zeta^T(t)\left(\Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_3 + \Xi_4 + \Xi_5\right)\zeta(t). \tag{9}$$

식 (9)에 의해 시스템 (6)의 안정화 조건은 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$\Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_3 + \Xi_4 + \Xi_5 < 0. \tag{10}$$

따라서, 조건 (10)에 따라 시스템 (6)의 안정화 조건을 구할 수 있다.

Ⅳ. 수치 예제

본 장에서는 수치 예제를 통해 본 논문에서 유도된 결과인 정리 1 을 보이겠다.

예제 1. 다음 행렬 및 값을 갖는 시스템 (6)을 고려하자.

$$A = \begin{bmatrix} -2.5714 & 9 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14.28 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3.8571 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T,$$
$$\Gamma^- = 0_n, \Gamma^+ = I_n.$$

정리 1 을 활용하여, 위 시스템 행렬 값과 $h_d = 0.5$ 일 때, 시스템의 최대 시간 지연은 h=0.2557, L=[3.8255, 0.3072, -3.9708]의 제어기 값을 얻었다.

위에서 얻은 값들을 활용하여 초기값이 $m^T(0) = [0.2, 0.3, -0.2]$ 와 $s^T(0) = [-0.3, -0.1, 0.4]$ 일 때, 시스템을 시뮬레이션 하였다. 그림 1 은 시스템 (6), 에러 시스템의 상태궤적이며, 그림 2 는 M 과 S, 즉 마스터 시스템과 슬래이브 시스템의 상태 궤적이다.

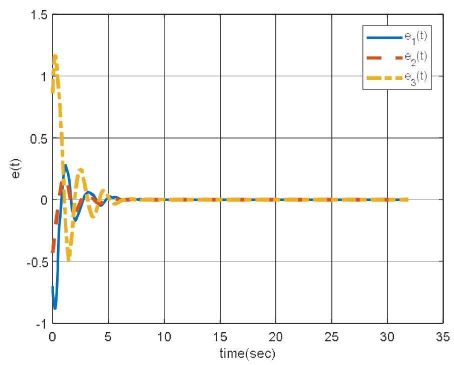

그림 1.

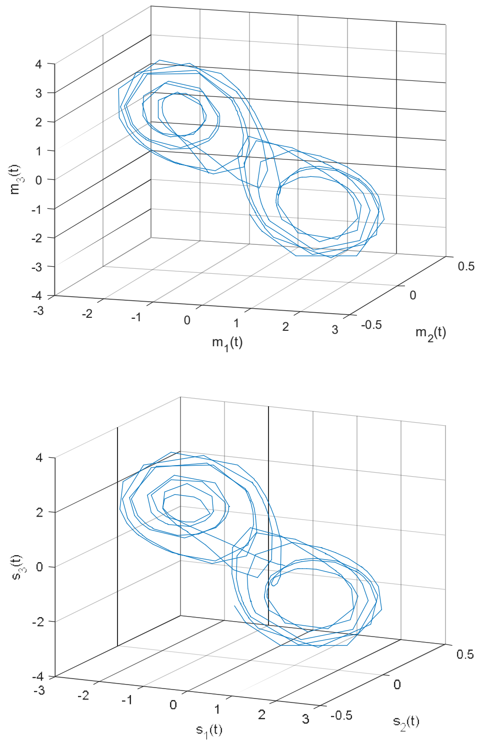

그림 2.

Ⅴ. 결론

본 논문은 시간지연이 있는 피드백 제어를 통한 루어 시스템 동기화 문제에 대해 연구하였다. 정리 1 에서는 리아프노브-크라소브스키 함수를 구성하고 사실 1, 보조정리 1 과 2 을 이용하여 선형행렬 부등식 형태로 유도 하였다. 위 방법을 마스터-슬레이브 수치 예제에 접목하여 정리 1 의 유효성을 입증하였다.

ACKNOWLEDGMENT

이 논문은 2020 년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. 2020R1A6A1A12047945).

참 고 문 헌

[1] A. Seuret and F. Gouaisbaut, "Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems", Automatica, 49, pp.2860-2866, 2013.

[2] P.G. Park, J.W. Ko and C. Jeong, "Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays", Automatica, 47, pp.235-238, 2011.

[3] Liao, Chen,"Chaos synchronizeation of general Lur'e systems via time-delay feedback control", International Journal of Bifurcation and Chaos, pp.207-213, 2001.